49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Onsdag, den 16 juli 2008

Problem 1. Låt H vara höjdernas skärningspunkt i en spetsvinklig triangel ABC. Cirkeln genom H och med centrum i mitten av sidan BC skär linjen BC i punkterna A_1 och A_2. På samma sätt skär cirkeln genom H och med centrum i mitten av sidan CA linjen CA i punkterna B_1 och B_2. Slutligen skär cirkeln genom H och med centrum i mitten av sidan AB linjen AB i C_1 och C_2.

Visa att punkterna A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 ligger på en cirkel.

Problem 2. (a) Visa att

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

för alla reella talen x, y, z som uppfyller $x \neq 1$, $y \neq 1$, $z \neq 1$ och $xyz = 1$.

(b) Visa att det finns oändligt många tripplar av rationella tal x, y, z som uppfyller $x \neq 1$, $y \neq 1$, $z \neq 1$ samt $xyz = 1$, och för vilka gäller likheten

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} = 1$$

Problem 3. Visa att det finns oändligt många positiva heltal n sådana att talet $n^2 + 1$ har en primtalsfaktor som är större än $2n + \sqrt{2n}$.

Tid: 4 timmar och 30 minuter
För varje problem kan man få upp till 7 poäng.

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Torsdag, den 17 juli 2008

Problem 4. Bestäm alla funktioner $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ (f är alltså en funktion från de positiva reella talen till de positiva reella talen), sådana att

$$\frac{\big(f(w)\big)^2 + \big(f(x)\big)^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

för alla positiva reella talen w, x, y, z som uppfyller $wx = yz$.

Problem 5. Låt n och k vara två positiva heltal sådana att $k \geq n$ och $k - n$ är ett jämnt tal.

Anta att $2n$ lampor är märkta med heltalen från 1 till $2n$. Var och en av lamporna kan antingen vara *på* eller *av*. Från början är alla lamporna av. Vi betraktar följder av *steg*, där i varje steg en av lamporna kopplas om (från att vara på till att vara av, eller från att vara av till att vara på).

Låt nu N vara antalet sådana följder av k steg som resulterar i att lamporna från 1 till n är alla på, medan lamporna från $n + 1$ till $2n$ är alla av.

Låt M vara antalet sådana följder av k steg som resulterar i att lamporna från 1 till n är alla på, lamporna från $n + 1$ till $2n$ är alla av, men där lamporna från $n + 1$ till $2n$ aldrig kopplas på.

Bestäm kvoten N/M.

Problem 6. Låt $ABCD$ vara en konvex fyrhörning, där $|BA| \neq |BC|$. Låt ω_1 och ω_2 beteckna de cirklar som är inskrivna i trianglarna ABC och ADC respektive.

Anta att det finns en cirkel ω som tangerar linjestrålen BA utanför punkten A, tangerar linjestrålen BC utanför punkten C och som dessutom tangerar linjerna AD och CD.

Visa att de gemensamma yttre tangenterna till ω_1 och ω_2 skär varandra på ω.

Tid: 4 timmar och 30 minuter
För varje problem kan man få upp till 7 poäng